

# SUATU TINJAUAN NUMERIK PERSAMAAN ADVEKSI DIFUSI 2-D TRANSFER POLUTAN DENGAN MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DU-FORT FRANKEL

JEFFRY KUSUMA<sup>1</sup>, KHAERUDDIN<sup>2</sup>, SYAMSUDDIN TOAHA<sup>3</sup>,  
NAIMAH ARIS<sup>4</sup>, ALMAN<sup>5</sup>

<sup>12345</sup>Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin

[jeffry.kusuma@gmail.com](mailto:jeffry.kusuma@gmail.com), [khaeruddin@gmail.com](mailto:khaeruddin@gmail.com), [syamsuddint@yahoo.com](mailto:syamsuddint@yahoo.com),  
[newima@gmail.com](mailto:newima@gmail.com), [math.unhas@yahoo.com](mailto:math.unhas@yahoo.com)

## *Abstract*

Persamaan Adveksi Difusi 2D yang biasa juga dikenal dengan persamaan transportasi dengan berbagai syarat awal dan syarat batas dibahas dengan pendekatan numerik. Kestabilan dan kekonvergenan metode diturunkan untuk domain teratur serta solusi persamaan Adveksi Difusi 2D dengan berbagai syarat awal serta syarat batas Dirichlet hingga Neumann dengan domain teratur hingga domain yang tidak teratur berusaha dikembangkan dengan pendekatan Du-Fort Frankel serta berbagai metode lain yang disesuaikan dengan syarat batas dan batasan yang ada.

Kata Kunci : Adveksi Difusi, Du-Fort Frankel, Kestabilan, Kekonvergenan, Domain Tidak Teratur, Danau Unhas

## 1. Pendahuluan

Penyebaran polutan pada perairan dangkal, pendangkalan waduk, pendangkalan sungai beserta tidak dapat dibantah lagi sangat mempengaruhi kehidupan masyarakat pesisir seperti kebanyakan masyarakat yang ada di Indonesia sehingga persoalan transportasi di perairan dangkal merupakan fenomena yang menarik untuk dikaji. Salah satu kajian yang banyak dilakukan para ahli adalah dengan menggunakan metode beda hingga. Banyak penelitian telah dilakukan untuk menganalisis kestabilan metode yang dipakai mendapatkan penyelesaian numerik persamaan Adveksi Difusi 2D dan menguji kekonvergenan solusi numerik untuk domain yang teratur seperti Noye [1], Alman [2]. Belakangan ini, Alman, Kusuma, J dan Amiruddin [3] mendapatkan solusi numerik persoalan adveksi difusi 2D dengan domain yang teratur dalam mempelajari penyebaran polutan pada perairan dangkal. Sayangnya sekali kebanyakan persoalan penyebaran polutan nyata berhubungan dengan permasalahan persoalan yang berada disekeliling kita berhubungan dengan domain yang tidak teratur, sehingga hasil yang telah diperoleh, belum dapat diterapkan secara langsung. Hal ini mungkin disebabkan oleh kompleksitas syarat batas yang dihadapi ataupun keterbatasan literature yang ada seperti pada Chern [4], dan Dormand [5]. Walaupun demikian, metode beda hingga tetap menyediakan solusi numerik yang akurat dan dapat dipakai untuk mendapatkan solusi numerik yang

diinginkan agar dapat diterapkan langsung.

Didalam tulisan ini, metode Dufort Frankel dan berbagai Metode Finite Difference lainnya digabung untuk digunakan, disimulasikan dan diterapkan untuk mendapatkan solusi numerik persamaan difusi adveksi 2D sesuai dengan keadaan pada batasan.

## 2. Persamaan Pembangun

Sebagaimana dalam Noye [1] dan Kusuma [6], persamaan pembangun yang berhubungan dengan transportasi konsentrasi polutan berupa persamaan Adveksi Difusi 2D yakni

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \quad (1)$$

dimana  $C$  menyatakan konsentrasi polutan yang terangkut dalam arah sumbu  $x$  dan  $y$ . Konstanta  $V_x$  dan  $V_y$  disini menyatakan kecepatan aliran yang searah sumbu  $x$  dan  $y$  berturut turut. Juga  $D_x$  dan  $D_y$  juga merupakan konstanta yang menyatakan koefisien difusi yang searah sumbu  $x$  dan sumbu  $y$  berturut turut.

Adapun syarat awal dan syarat batas yang menyertai persamaan pembangun akan dimulai dari domain yang teratur sebagai verifikasi solusi numerik, hingga ke domain yang tidak teratur.

## 3. Metode Beda Hingga

Pendekatan skema beda hingga yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Adveksi Diffusi 2D seperti yang digambarkan dalam persamaan (1) digunakan metode beda hingga *Du-Fort Frankel* berikut :

$$\frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + V_x \left( \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + V_y \left( \frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) = D_x \left( \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n-1} + C_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + D_y \left( \frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n-1} + C_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right), \quad (2)$$

atau

$$C_{i,j}^{n+1} = \left( \frac{1-2B_x-2B_y}{1+2B_x+2B_y} \right) C_{i,j}^{n-1} + \left( \frac{-A_x+2B_x}{1+2B_x+2B_y} \right) C_{i+1,j}^n + \left( \frac{A_x+2B_x}{1+2B_x+2B_y} \right) C_{i-1,j}^n + \left( \frac{-A_y+2B_y}{1+2B_x+2B_y} \right) C_{i,j+1}^n + \left( \frac{A_y+2B_y}{1+2B_x+2B_y} \right) C_{i,j-1}^n, \quad (3)$$

dimana

$$A_x = \frac{V_x \Delta t}{\Delta x}, A_y = \frac{V_y \Delta t}{\Delta y}, B_x = \frac{D_x \Delta t}{(\Delta x)^2}, B_y = \frac{D_y \Delta t}{(\Delta y)^2}. \quad (4)$$

Sebagaimana terlihat diatas, metode Du-Fort Frankel melibatkan dua lapis pendekatan yang melibatkan waktu. Untuk lapisan pertama dapat digunakan metode beda hingga *Forward Time Center Difference* berikut :

$$\frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n}{\Delta t} + V_x \left( \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + V_y \left( \frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) = D_x \left( \frac{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right) + D_y \left( \frac{C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right), \quad (5)$$

atau

$$C_{i,j}^{n+1} = (1 - 2B_x - 2B_y)C_{i,j}^n + (-2A_x + B_x)C_{i+1,j}^n + (2A_x + B_x)C_{i-1,j}^n + (-2A_y + B_y)C_{i,j+1}^n + (2A_y + B_y)C_{i,j-1}^n \quad (6)$$

Adapun pendekatan metode beda hingga lainnya, senantiasa digunakan dan disesuaikan dengan kontur dan batasan domain serta syarat awal yang ada. Metode ini meliputi Forward Time Forward Space, Forward Time Backward Space, Forward Time Center Space baik untuk sumbu  $x$  maupun untuk sumbu  $y$ .

#### 4. Grid Komputasi dan Kestabilan

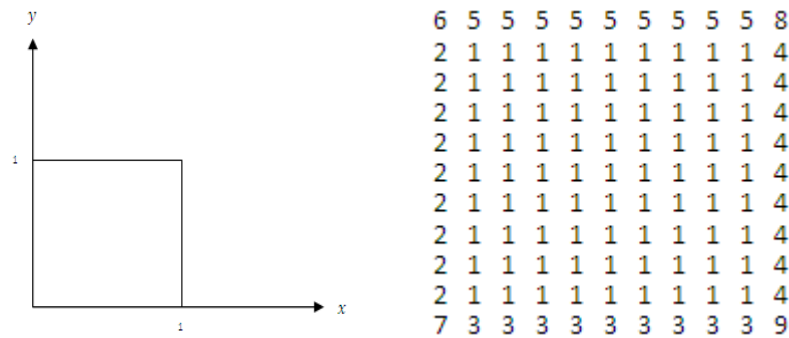
Grid komputasi dan kestabilan telah banyak dibahas sebagaimana dalam Gilberto [7], disini dimulai dengan mengasumsi bahwa domain komputasi telah dibuat non dimensional dengan batasan untuk  $0 \leq x \leq 1$  dan juga  $0 \leq y \leq 1$  yang memuat domain fisik yang menyertai persamaan difusi adveksi. Domain ini kemudian didiskritisasi dan diberi kode batasan. Kode ini meliputi kode luar domain fisik, dalam domain fisik, kiri, kanan, atas, bawah, kiri atas, kanan atas, kiri bawah, dan kanan bawah domain fisik. Secara teoritis, komputasi akan stabil untuk semua

nilai  $B_x + B_y$  untuk  $A_x + A_y < 1$  atau  $B_x + B_y \geq \frac{1}{2} \sqrt{(A_x + A_y)^2 - 1}$  untuk  $A_x + A_y > 1$  dimana nilai nilai  $A_x, A_y, B_x, B_y$  diberikan oleh persamaan (4).

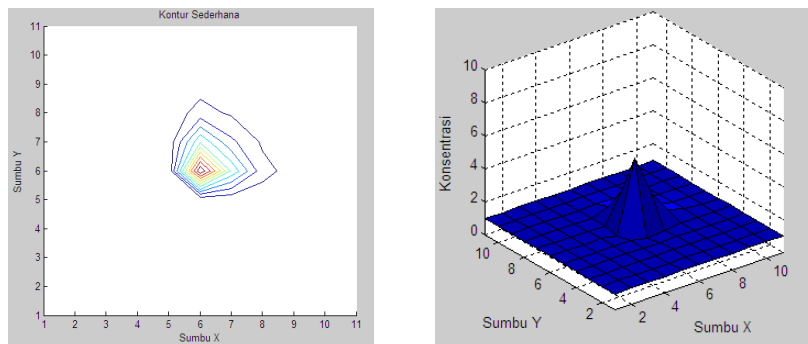
#### 5. Hasil dan Pembahasan

Untuk mengetahui kebenaran hasil komputasi yang dibangun tinjau persoalan adveksi difusi 2D dengan batasan berbentuk persegi  $0 \leq x \leq 1$  dan  $0 \leq y \leq 1$ , dengan nilai konstanta adveksi  $v_x = v_y = 0.1$ , serta konstanta difusi  $D_x = D_y = 0.004$ . Grid komputasi sumbu  $x$  maupun sumbu  $y$  dibagi atas 10 grid dan grid waktu diambil sebesar 0.05. Secara explicit, gambar 1 memperlihatkan domain yang ditinjau dan juga kode batasan yang terlibat. Adapun syarat awal yang terlibat semuanya bernilai 1 pada keseluruhan domain kecuali pada satu titik yang berada di tengah yang diberi nilai 10. Hasil perhitungan yang diperoleh di plot dengan menggunakan plot kontur dan plot secara tiga dimensi sebagaimana dalam gambar 2 di bawah ini.

Validasi hasil yang diperoleh kemudian dilanjutkan dengan melibatkan batasan yang berbentuk huruf L dan kode batasan sebagaimana dalam gambar 3. Adapun konstanta difusi adveksi yang terlibat bernilai  $v_x = 0.125$ ,  $v_y = 0$ ,  $D_x = D_y = 0.004$ . Grid komputasi sumbu  $x$  maupun sumbu  $y$  dibagi atas 20 grid dan grid waktu diambil sebesar 0.1. Hasil perhitungan yang diperoleh di plot dengan menggunakan plot kontur dan plot secara tiga dimensi sebagaimana dalam gambar 4. Adapun syarat awal yang digunakan yakni seluruhnya bernilai 1 kecuali pada 1 titik grid yang berupa sumber polutan pada posisi grid  $C(14,5,1) = 10$ . Kontur plot dan Simulasi konsentrasi polutan pada grid waktu 10 diperlihatkan pada



**Gambar 1** Domain Daerah dan Kode Batasan



**Gambar 2** Kontur Sederhana dan Penyebaran Konsentrasi

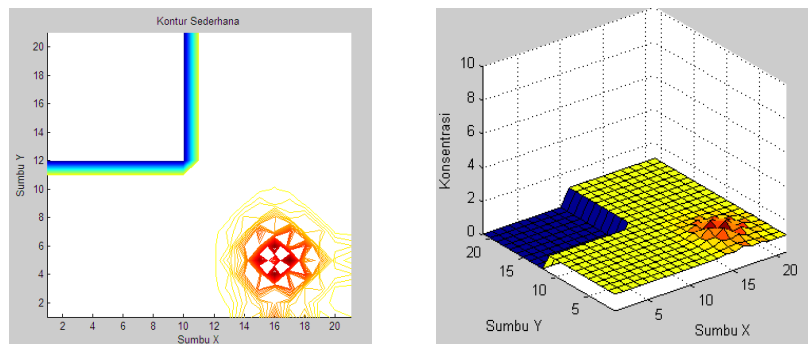
gambar 4. Hasil yang diperoleh dalam komputasi memperlihatkan proses difusi dan adveksi telah berjalan dengan baik, sebagaimana terlihat pusat konsentrasi telah bergeser dan berada pada posisi grid  $C(16,5,10)$ .

Pada gambar 5, validasi dilanjutkan dengan melibatkan batasan domain yang lebih kompleks. Gambar 6 memperlihatkan hasil yang diperoleh dengan menggunakan konstanta adveksi dan difusi yang sama dengan hasil dari gambar 4.

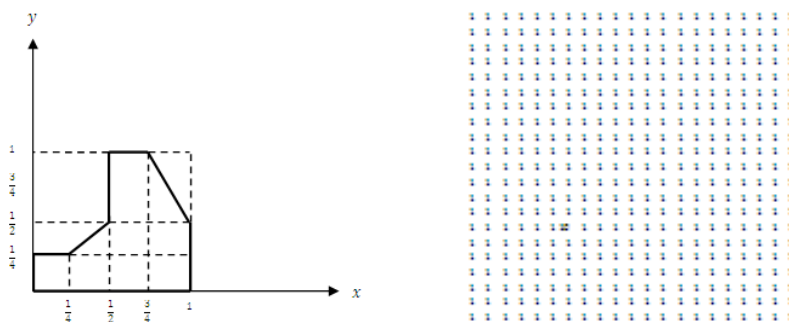
Gambar 7 merupakan foto udara danau Universitas Hasanuddin yang terdapat kampus Tamalanrea, km9 Makassar, sebagaimana diambil dari Googlemap. Danau ini secara fisik berukuran panjang 400 m dan lebar 300 m. Lokasi area ini merupakan domain interest dalam penyebaran polutan pada perairan dangkal. Gambar 7 juga memperlihatkan grid komputasi yang digunakan untuk simulasi solusi persamaan adveksi difusi yang dibangun. Sumbu  $x$  di bagi atas 41 grid, sumbu  $y$  dibagi atas 33 grid dan grid waktu sebesar 0.1 satuan waktu. Dengan demikian, setiap grid komputasi mewakili ukuran fisik sebesar 10 m. Sumber polutan di tempatkan pada 2 posisi yakni pada grid  $C(21,14,1)$  dan  $C(19,25,1)$  dan masing masing bernilai 10.



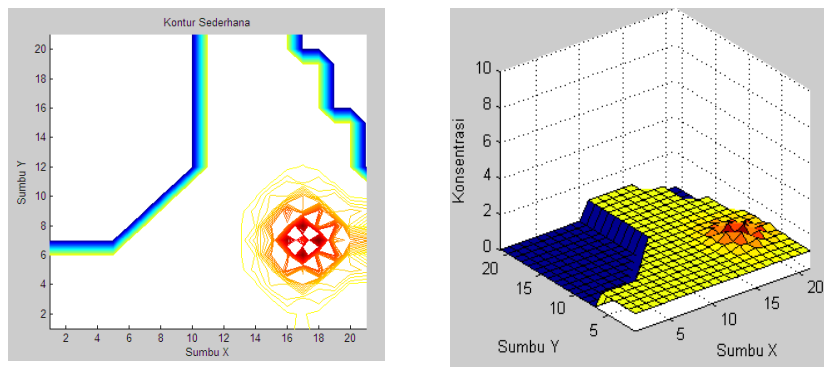
**Gambar 3** Domain Daerah dan Kode Batasan



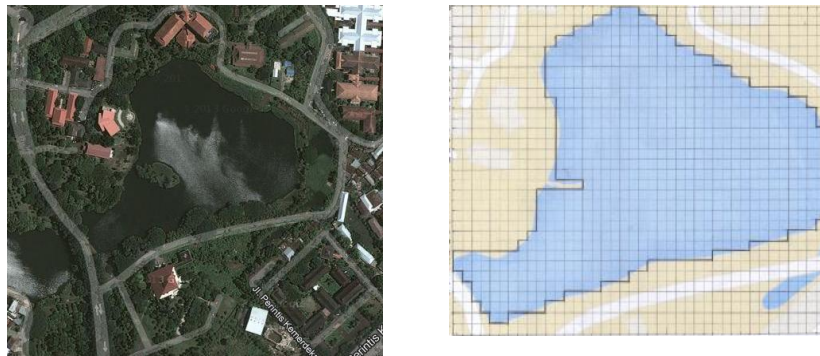
**Gambar 4** Kontur Sederhana dan Penyebaran Konsentrasi



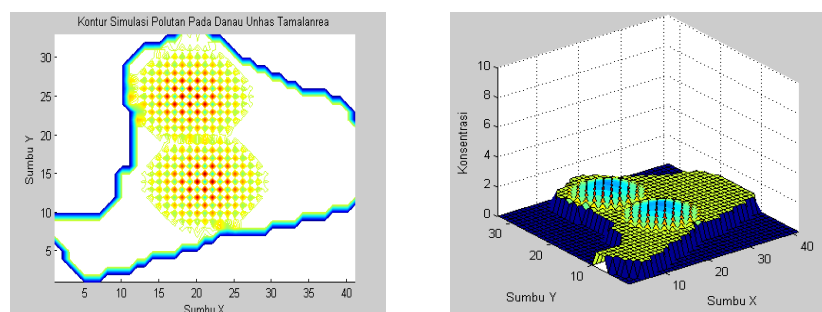
**Gambar 5** Domain Daerah dan Syarat Awal Polutan



**Gambar 6** Kontur Sederhana dan Penyebaran Konsentrasi



**Gambar 7** Foto Udara Danau Unhas dan Grid Komputasi



**Gambar 8** Kontur Simulasi Sederhana dan Simulasi Penyebaran Konsentrasi Polutan

## 6. Kesimpulan

Dari hasil komputasi yang diperoleh, dapat ditarik kesimpulan bahwa metode Dufort Frankel dapat digunakan dalam mendapatkan simulasi hasil penyebaran polutan sebagaimana yang diperlihatkan dalam hasil komputasi diatas.

## Daftar Pustaka

- [1] Noye, J., (1991), Computational Techniques for Differential Equations, North - Holland.
- [2] Alman, (2013), Penyelesaian Numerik Persamaan Adveksi Difusi 2-D Untuk Model Transportasi Polutan Dengan Menggunakan Metode Beda Hingga Dufort Frankel, Tesis, Jurusan Matematika, FMIPA, Unhas.
- [3] Alman, Kusuma, J., Amiruddin, (2013) Penyelesaian Numerik Persamaan Adveksi Difusi 2-D Untuk Transfer Polutan Dengan Menggunakan Metode Beda Hingga Dufort Frankel, Jurnal Pasca Sarjana, Universitas Hasanuddin.
- [4] Chern, I Ling. (2009), Finite Difference Method for Solving Differential Equation. Diakses 19 Maret 2013 dari : <http://scicomp.math.ntu.edu.tw/wiki/images/6/62/FD.pdf>
- [5] Dormand, J. R. (2006), Numerical Methods for Differential Equations, A Computational Approach. CRC Press, NY.
- [6] Kusuma, Jeffry (2010), Persamaan Differensial Parsial, Diktat Kuliah, Jurusan Matematika FMIPA Unhas, Makassar.
- [7] Gilberto E.Urroz, (2004), Convergence, Stability, and Consistency of Finite Difference Schemes in the Solution of Partial Differential Equations. Diakses 15 Maret 2013 dari : [http://ocw.usu.edu/civil\\_and\\_environmental\\_engineering/numerical\\_methods\\_in\\_civil\\_engineering/Stability\\_Numerical\\_Schemes.pdf](http://ocw.usu.edu/civil_and_environmental_engineering/numerical_methods_in_civil_engineering/Stability_Numerical_Schemes.pdf)

